SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

D. Guidetti

OPERATORI DI EVOLUZIONE PER EQUAZIONI PARABOLICHE LINEARI E QUESTIONI CORRELATE

15 Febbraio 1990

Scopo di questo seminario è illustrare i principali risultati ottenuti negli ultimi trenta anni sull'equazione parabolica lineare astratta

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt}(t) = A(t)\, u(t) + f(t),\ t \in [s,T] \\ u(s) = u_0 \end{array} \right\}$$

per inquadrare meglio alcuni recenti risultati contenuti nel lavoro [1] riguardanti questioni correlate al problema (1).

Le ipotesi generali che si supporranno nel seguito sempre soddisfatte sono le seguenti:

E è uno spazio di Banach complesso, $T > 0$, per $t \in [0,T]$ $A(t)$ è un operatore lineare con dominio $D(A(t))$ in E, tale che $\exists\ \omega \in\ ]\frac{\Pi}{2}, \pi]$ per cui si ha $\{\lambda \in C \mid |\mathrm{Arg}\ \lambda| \leq \omega\} \subset \rho(A(t))$ (risolvente di $A(t)$) e $\|(\lambda - A(t))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{1+|\lambda|}$.

Quello che interessa è dare condizioni sufficienti che assicurino quanto segue:

(E) Per ogni $s \in [0,T[$ il problema (1) con $f = 0$ ha un'unica soluzione $t \to U(t,s)u_0$ per ogni $u_0 \in D(A(s))$ e vale la stima

$$\|U(t,s)u_0\|_E \leq C\, \|u_0\|_E$$

con $c > 0$ indipendente da t,s,u_o.

Ciò permette di costruire un operatore di evoluzione $U(t,s)$ in maniera tale che, se u_o e f soddisfano ipotesi estremamente generali, la funzioni

$$u(t) = U(t,s)\, u_o + \int_s^t U(t,\sigma) f(\sigma) d\sigma \tag{2}$$

è soluzione (in qualche senso generalizzato) di (1).

Il problema modello sarà il seguente:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = A(t,x,\partial)u(t,x) + f(t,x), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t,x) \in [0,T] \times \Omega \\ &u(o,x) = u_o(x) \\ &B(t,x,\partial)u|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Qui Ω è un aperto limitato e regolare di $\mathbf{R}^n$, $A(t,x,\partial)$ è un operatore fortemente ellittico, $B(t,x,\partial)$ è un operatore lineare di ordine non superiore a 1, tale che $\forall\, t \in [0,T]$ il problema al contorno ellittico $\{A(t,x,\partial), B(t,x,\partial)\}$ soddisfa le ipotesi di Agmon (vedi [3] 3.8). Se $E = L^p(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$, i coefficienti di $A(t,x,\partial)$ sono continui, quelli di $B(t,x,\partial)$ sono continui e di classe C^1 nella variabile x, è ben noto che le ipotesi generali sono soddisfatte

ponendo $D(A(t)) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) | B(t,x,\partial)u|_{\partial\Omega} = 0\}$, $A(t,x,\partial)u = A(t)u$.

Queste ipotesi sono ancora soddisfatte se l'ordine di $B(t,x,\partial)$ è uno, i coefficienti di $A(t,x,\partial)$ sono di classe C^{β} in X $(0 < \beta < 1)$, i coefficienti di $B(t,x,\partial)$ sono di classe $C^{1+\beta}$ in x (uniformemente in t), ponendo $E = C^{\beta}(\Omega)$, $D(A(t)) = \{u \in C^{2+\beta}(\Omega) | B(t,x,\partial)u|_{\partial\Omega} = 0\}$. Il primo importane risultato è il seguente:

Teorema 1 (Tanabe [2]). *Sia* $D(A(t)) = D(A(o))$ $\forall$ $t \in [0,T]$ *e sia* $D(A(o))$ *denso in* E. Valga poi:

(4) $$\|[A(t)-A(s)]x\|_E \leq C(t-s)^{\alpha} \|x\|_{D(A(o))}$$

$t,s \in (0,T)$, $x \in D(A(o))$ *per qualche* $\alpha > 0$

Allora, è possibile costruire un operatore di evoluzione $U(t,s)$ *con le proprietà richieste.*

La dimostrazione è basata sulla seguente idea: cercare una soluzione di (1) (per f = 0) nella forma:

(5) $$u(t) = \exp((t,s)A(s))u_o + \int_s^t \exp((t-\sigma)A(\sigma))R(\sigma)d\sigma$$

Imponendo che u sia soluzione, si arriva all'equazione integrale di Volterra:

$$R(t) = [A(t)-A(s)] \exp((t-s)A(s))u_0 + \tag{6}$$
$$+ \int_s^t (A(t)-A(\sigma)) \exp((t-\sigma)A(\sigma)) R(\sigma)d\sigma$$

che ha un nucleo debolmente singolare.

Le ipotesi fatte sono applicabili al caso $E = L^p(\Omega)$ con $B(t,x,\partial) = 1$ e i coefficienti di $A(t,x,\partial)$ holderiani in t (in questo caso $D(A(t)) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ indipendente da t).

Le ipotesi del teorema 1 sono sufficientemente generali da consentire (nel caso di problemi al contorno di tipo Dirichlet in spazi L^p) la trattazione di problemi parabolici quasi lineari (vedi ad es. Sobolevskii [4]).

Resta dunque da considerare il caso in cui D(A(t)) dipende da t. In questo caso un primo interessante risultato è il seguente:

Teorema 2 (Kato-Tanabe [5]). *Supponiamo* D(A(t)) *denso in* E, *per ogni* $t \in [0,T]$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$, $t \to (\lambda-A(t))^{-1} \in C^{1+\alpha}([0,T]; \mathcal{L}(E))$ $(\alpha>0)$ *e* $\|\frac{d}{dt}(\lambda-A(t))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{c}{1+|\lambda|^\alpha}$.

Allora, è possibile costruire un operatore di evoluzione.

L'idea della dimostrazione è analoga a quella del Teorema 1. La soluzione u è però cercata nella forma

$$u(t) = \exp((t-s)A(t))u_0 + \int_s^t \exp((t-\sigma)A(t))\, R(\sigma)\, d\sigma\,. \tag{7}$$

Il Teorema 2 è applicabile al caso in cui $E = L^p(\Omega)$, i coefficienti di $A(t,x,\partial)$ sono di classe $C^{1+\alpha}([0,T];\, C^1(\Omega))$.

Le ipotesi del Teorema 2 sono però troppo restrittive per consentire applicazioni a problemi quasi lineari non banali.

Si è dunque cercato di ottenere i risultati voluti sotto ipotesi diverse da quelle del Teorema 2.

Negli stessi anni in cui veniva elaborato il Teorema 2, Kato e Sobolevskii (vedi [6], [7]) ottennero il seguente

Teorema 3. *Sia* $D(A(t))$ *denso in* E *per ogni* $t \in (0,T)$ *ed esista* $\rho \in]0,1]$ *tale che* $D((-A(t))^\rho) = D((-A(o))^\rho)$ *per ogni* $t \in [0,T]$. *Esista inoltre* α *tale che* $\alpha + \rho > 1$ *per cui si abbia*

$$\|[(-A(t))^\rho - (-A(s)^\rho)]\, x\|_E \le C(t-s)^\alpha \, \|x\|_{D((-A(o))^\sigma)}$$

Allora, è possibile costruire un operatore di evoluzione.

(In realtà il risultato di Kato richiedeva anche che ρ^{-1} fosse un numero naturale).

Ricordiamo che $(-A(t))^\rho$ è la chiusura in E dell'operatore (definito su D(A(t)))

$$x \to -\frac{1}{\Gamma(\rho)\Gamma(1-\rho)} \int_0^{+\infty} s^{\rho-1} A(t)\,(s-A(t))^{-1}\, x\, ds.$$

L'interesse del teorema 3 è notevolmente limitato dalla difficoltà di verificare se, nei casi concreti, le sue ipotesi sono soddisfatte. Un primo problema è caratterizzare $D((-A(t))^\rho)$.

Sono noti i seguenti risultati:

Teorema 4 (di Heinz, Kato) (vedi [3], 2.3.3.). *Sia* E *uno spazio di Hilbert,* Λ *un operatore lineare massimale monotono in* E. *Allora, per ogni* $\rho \in [0,1]$, $D(\Lambda^\rho)$ *coincide con lo spazio di interpolazione complessa* $(E,D(\Lambda))_{[\rho]}$.

Teorema 5 (vedi [8] 1.15.3). *Sia* Λ *un operatore lineare in* E *(Spazio di Banach) tale che* $]-\infty,0] \subset \rho(\Lambda)$. *Supponiamo che* $\exists\, \varepsilon,c>0$ t.c. $\Lambda^{it} \in \mathfrak{L}(E)$ $t \in [-\varepsilon,\varepsilon]$, $\|\Lambda^{it}\|_{\mathfrak{L}(E)} \leq C$. *Allora, per ogni* $\rho \in]0,1[$, $D(\Lambda^\rho) = (E, D(\Lambda))_{[\rho]}$.

(Ricordiamo che Λ^{it} è la chiusura in E dell'operatore definito su $D(\Lambda)$

$$x \to \frac{1}{\Gamma(1+it)\Gamma(1-it)} \int_0^{+\infty} s^{it}\, \Lambda(\Lambda+S)^{-2}\, x\, ds)$$

Ora, R. Seeley (vedi [9]) ha mostrato che le ipotesi del Teorema 5 sono soddisfatte negli spazi $L^p(\Omega)$ per i problemi ellittici che stiamo considerando, purché i coefficienti siano di classe C^∞ su Ω.

Dunque, nel caso $E = L^p(\Omega)$, ordine di $B(t,x,\partial) = 1$, e coefficienti di $A(t,x,\partial)$ e $B(t,x,\partial)$ di classe C^∞, si ha

$$D((-A(t))^\rho) = (L^p(\Omega)\,,\, D(A(t)))_{[\rho]} =$$

(in base a risultati dello stesso Seeley)

$$\{u \in H^{2\rho,p}(\Omega) |\ B(t,x,\partial)u|_{\partial\Omega} = 0\} \quad \text{se}$$

$$2\rho > 1 + p^{-1}$$

$$H^{2\rho,p}(\Omega) \quad \text{se} \quad 2\rho < 1 + p^{-1}.$$

Dunque, se $\rho < \frac{1+p^{-1}}{2}$, $D((-A(t))^\rho)$ non dipende da t.

Resta da verificare la regolarità in u di $(-A(t))^\rho$. Il risultato seguente è dovuto a Yagi (vedi [10]): se le ipotesi di Seeley sono soddisfatte, $p = 2$, i coefficienti di $A(t,x,\partial)$ sono di Classe $C^\alpha([0,T];\ C^\infty(\Omega))$, i coefficienti di $B(t,x,\partial)$ sono di classe $C^\alpha([0,T];\ C^\infty(\partial\Omega))$, e se $\rho < \frac{3}{4}$ $\left(= \frac{1+1/2}{2}\right)$, $f \in$

$D((-A(t))^\rho)$

$$\|(-A(t))^\rho f - (-A(s))^\rho f\|_{L^2} \leq C\,|t-s|^\alpha\ \|f\|_{D((-A(o))^\rho)}$$

Quindi, il teorema 4 è applicabile sotto le ipotesi di Yagi, purchè $\alpha > \frac{1}{4}$.

A partire dalla metà degli anni ottanta, il problema lineare è stato affrontato (proprio in vista delle applicazioni a problemi quasi lineari) da H. Amann.

L'idea di Amann (vedi [11]) è essenzialmente la seguente: Costruire uno spazio $\tilde{E}$ contenente E e per ogni $t \in (0,T]$ un prolungamento $\tilde{A}(t)$ di A(t) nello spazio $\tilde{E}$ in modo che:

(a) in $\tilde{E}$ gli operatori $\tilde{A}(t)$ hanno dominio indipendente da t e soddisfano le i potesi del teorema 1.

(b) $t \in [0,T]$, E coincide con un opportuno spazio di interpolazione tra $\tilde{E}$ e $D(\tilde{A}(t))$.

Applicando il teorema 1, (a) e (b) consentono di costruire un operatore di evoluzione $\tilde{U}(t,s)$ in $\tilde{E}$. Sotto opportune ipotesi egli cerca di provare che se U(t,s) è la parte di $\tilde{U}(t,s)$ in E, U(t,s) è un operatore di evoluzione in E.

Egli comincia col costruire per ogni $t \in [0,T]$ una scala di spazi $E_\alpha(t) = D(A(t)^\alpha)$ se $\alpha \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ (in particolare $E_o(t) = E$). Se $\alpha > 0$ e $n < \alpha < n+1$ con $n \in \mathbf{N}$, pone $E_\alpha(t) = (E_n(t), E_{n+1}(t))_{[\alpha-n]}$.

Se $-\alpha \in \mathbf{N}$, pone $E_\alpha(t)$ = completamento di E rispetto alla norma $\|A^\alpha(t)x\|_E$. Come nel caso $\alpha > 0$ definisce infine $E_\alpha(t)$ per $\alpha < 0$, $\alpha \notin \mathbf{Z}$ per interpolazione complessa. In questo modo, per ogni t $\alpha < \beta \Rightarrow E_\beta(t) \subset E_\alpha(t)$.

A questo punto, per $\alpha \in \mathbf{R}$ si pone:

(a) $A_\alpha(t)$ = parte di $A(t)$ in $E_\alpha(t)$ se $\alpha \geq 0$
(b) $A_\alpha(t)$ = chiusura di $A(t)$ in $E_\alpha(t)$ se $\alpha \leq 0$.

Si verifica abbastanza facilmente che per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ gli operatori $A_\alpha(t)$ verificano ancora le nostre ipotesi fondamentali. Inoltre, $D(A_\alpha(t)) = E_{\alpha+1}(t)$.

Si introduce allora la seguente ipotesi:
$\exists\ \rho \in]0,1]$ tale che $E_\rho(t)$ non dipende da t. Inoltre, $\exists\ c_1, c_2$ positivi tali che $x \in E_\alpha(0)$,

(8) $$c_1 \|x\|_{E\rho(t)} \leq \|x\|_{E\rho(o)} \leq c_2 \|x\|_{E\rho(t)} ,$$

c_1 e c_2 indipendenti da t.

La stima (8) si può ottenere come conseguenza della seguente ipotesi

(W) $\exists$ uno spazio di Banach W_1 e una costante $k_1 > 0$ tali che:

$$K^{-1}\|x\|_{W1} \leq \|x\|_{E1(t)} \leq k\,\|x\|_{W1} \ , \ x \in E_1(t) = D(A(t))$$

per $0 \leq t \leq T$.

A questo punto si vuole che anche $E_{\alpha-1}(t)$ sia indipendente da t, in modo da assumere $\tilde{E} = E_{\alpha-1}(o)$, $\tilde{A}(t) = A_{\alpha-1}(t)$, $D(\tilde{A}(t)) = E_{\alpha}(o)$. Ciò si può ottenere introducendo un'ipotesi di tipo duale:

Supponiamo che E sia riflessivo. A partire dagli operatori $A(t)'$ in E' (che soddisfano ancora le ipotesi fondamentali) costruiamo una scala duale di spazi e di operatori $(E_{\alpha})(t)$, $A_{\alpha}(t)')$. Si verifica che $E_{\alpha}(t) \cong (E_{-\alpha}(t))'$. Supponiamo poi che $E_{1-\alpha}(t)$ sia indipendente da t e che $\exists$ uno spazio di Banach $W_1^{\#}$ e una costante $K^{\#} > 0$ tali che:

$$K^{\#-1} \|x'\|_{W_1^{\#}} \leq \|x'\|_{E'(t)} \leq K^{\#} \|x'\|_{W_1^{\#}}, \; x' \in E'(t).$$

Ciò fornisce il risultato voluto.

Ultimo ingrediente per poter applicare il Teorema 1 è un'ipotesi che garantisca (4). Si suppone allora che

$$\| [A(t)^{-1} - A(s)^{-1}] x\|_{E_{\rho-1}(o)}, \leq c|t-s|^{\alpha} \|x\|_{E_{\rho}(o)}$$

In tal modo, assumendo $\tilde{E} = E_{\rho-1(o)}$, si può costruire in $\tilde{E}$ l'operatore di evoluzione $\tilde{U}(t,s)$.

Per avere poi che $U(t,s)$ = parte di $\tilde{U}(t,s)$ in E (= $E_o(t)$) sia un

operatore di evoluzione in E, bisogna supporre che $\alpha + \rho > 1$.

Abbiamo perciò il seguente:

Teorema 6. *Sia* E *uno spazio di Banach riflessivo,* $\exists\, W_1$ *tale che* $D(A(t)) \subset W_1 \quad \forall t \in [0,T]$, *e per qualche costante* K

$$K^{-1} \|A(t)x\|_E \leq \|x\|_{W1} \leq K\|A(t)x\|_E ,$$

$\exists\, W_1^{\#}$ *tale che* $D(A(t)') \subset W_1^{\#} \;\; \forall\, t \in [0,T]$ e

$$K^{-1} \|A(t)'x'\|_{E'} \leq \|x\|_{W'^{\#}} \leq K\|A(t)'x'\|_{E'} \quad \text{per ogni } x' \in D(A(t)')$$

Supponiamo poi che $\exists\, \rho \in]0,1[$ *tale che* $E_\rho(t)$ *e* $E_{\rho-1}(t)$ *non dipendono da* t.

Valga infine

$$\|[A_{\rho-1}(t) - A_{\rho-1}(s)]\, x\|_{E_{\rho-1}(o)} \leq c\, |t-s|^\alpha \|x\|_{E_\rho(o)} \;\; \forall\, x \in E_\rho(o)$$

per qualche $\alpha > 1-\rho$.

Allora è possibile costruire un operatore di evoluzione in E.

Dal punto di vista applicativo, il teorema 6 è utilizzabile se $E = L^p(\Omega)$,

$A(t,x,\partial) = \sum_{ij} \partial_i(a_{ij}(t,x)\partial_j u)$ con $a_{ij} \in C^{\alpha}([0,T]; C^{\rho}(\Omega))$ con α,ρ opportuni in $]0,1]$, i coefficienti di $B(t,x,\partial)$ sono di classe $C^{\alpha}([0,T]; C^{\rho+1}(\partial\Omega))$. Questi risultati sono applicabili a numerosi problemi parabolici quasi lineari.

Da ultimo, consideriamo le ipotesi di Acquistapace e Terreni che per molti aspetti sembrano le più generali:

Teorema 7 (Acquistapace, Terreni [12]) $\exists\ B > 0,\ K \in \mathbf{N},$ $\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_1,\dots,\beta_k \in [0,2]$ *con* $\delta = \min_{1\le i\le k} (\alpha_i-\beta_i) > 0,$

tali che:

$$\|A(t)\,(\lambda-A(t))^{-1}\,[A(t)^{-1}-A(s)^{-1}]\|_{\mathfrak{L}(E)} \le B \sum_{i=1}^{k} (t-s)^{\alpha_i}\,|\lambda|^{\beta_i-1} \quad (\mathrm{Re}\lambda \ge 0)$$

Allora, è possibile costruire un operatore di evoluzione

Osserviamo, innanzi tutto, che non è richiesta la densità dei domini. In secondo luogo, sorprendentemente, l'ipotesi del teorema 7 è conseguenza delle seguenti:

(a) ipotesi del teorema [3] con $\rho = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$

(b) esiste $\rho \in]0,1[$ tale che (con norme uniformemente equivalenti)

$$(E, D(A(t)))_{\rho,\infty} = (E, D(A(o))_{\rho,\infty}$$

e, per $\alpha > 1-\rho$,

$$\|A(t))^{-1} - A(s)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(E,(E,D(A(o))_{\rho,\infty})} \leq c|t-s|^{\alpha}$$

Si può vedere che quest'ultima ipotesi, richiedendo solo stime in spazi di interpolazione, è applicabile anche a problemi in spazi di tipo $L'(\Omega)$ o $C(\bar{\Omega})$.

Concludiamo infine illustrando brevemente i risultati del lavoro [1]. In questo lavoro si è cercato di studiare un problema, da una parte più generale (nei casi concreti non si suppongono più nulle le condizioni al contorno), dall'altra non applicabile (per la maggior specializzazione dei risultati) a problemi parabolici trattabili invece col teorema 7 (ad es. problemi in aperti non cilindrici, ecc.).

Consideriamo la situazione seguente:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{du}{dt}(t) = A(t)\ u(t) + f(t),\ t \in [0,T] \\ \tau(B(t)u(t)-g(t))=0,\ t \in [0,T] \\ u(o) = u_o \end{array}\right\}$$

Sotto le ipotesi seguenti:

(a) E_0, E_1 sono spazi di Banach con $E_1 \subset E_0$ e nome $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$

(b) $\mu \in \mathbf{R}$, $0 \le \mu < 1$, $E_{1-\mu}$, F_{θ_0}, $F_{\theta_0+\mu}$ sono spazi di Banach tali che, se $A,B,C \in \{E, F\}$, $\xi,\eta,\rho \in \{0,1, 1-\mu, \theta_0+\mu\}$, $\theta \in]0,1]$ e $(1-\theta)\,\xi + \theta\eta = \rho$, C_ρ è di tipo θ fra A_ξ e B_η. Inoltre, se $\xi < \eta$, $B_\eta \subset A_\xi$. Indichiamo con $|\cdot|_\xi$ la norma in F_ξ .

(c) $\theta_0 + \mu < 1$

(d) $0<T<+\infty$, $A \in C^\beta([0,T], \mathcal{L}(E_1,E_0))$,
$\mathcal{B} \in C^\beta([0,T]; \mathcal{L}(E_1,E_{1-\mu}) \cap \mathcal{L}(F_{\theta_0+\mu},F_{\theta_0}))$
con $\beta > 1-\theta_0-\mu$.

(e) Z è uno spazio di Banach e $\tau \in \mathcal{L}(E_{1-\mu},Z)$

(f) $\exists\, \phi_0 \in]\pi/2,\pi]$ tale che il problema

$$\begin{Bmatrix} \lambda - A(t)u = f \\ \tau(B(t)u - g) = 0 \end{Bmatrix}$$

ha un'unica soluzione $u \in E$, $\forall\, f \in E_0$, $g \in E_{1-\mu}$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\,\lambda \ge 0$ e vale

$$(1+|\lambda|)\,\|u\|_0 + \|u\|_1 \le C(\|f\|_0 + (1+|\lambda|)^{1-\mu-\theta_0}\,|g|_{\theta_0} + \|g\|_{1-\mu})$$

Ad esempio, sia per $\theta \in [0,1]$, $E_\theta = F_\theta = W^{2\theta,p}(\Omega)$. Sia $B(t,x,\partial)$ del primo

ordine con coefficienti in $C^\beta([0,T];\ C'(\bar{\Omega}))$, $A(t,x,\partial)$ con coefficienti in $C^\beta([0,T];\ C(\bar{\Omega}))$. Indichiamo con τ l'operatore di traccia e scegliamo ad esempio, $Z = L^p(\partial\Omega)$. Se $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$, $f \in L^p(\Omega)$, $g \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\begin{Bmatrix} \lambda - A(t)u = f \\ \tau(B(t)u - g) = 0 \end{Bmatrix}$$

Si ha

$$(1+|\lambda|)\ \|u\|_0 + \|u\|_1 \leq C(\|f\|_0 + (1+|\lambda|)^{1/2-\xi}\ \|g\|_\xi + \|g\|_{1/2})$$
$$\forall \xi < \frac{1}{2p}.$$

Bisognerà perciò richiedere che

$$\beta + \frac{1}{2p} + 1/2 > 1 \quad (\text{cioè } \beta > \frac{1}{2} - \frac{1}{2p})$$

Consideriamo lo stesso problema nello spazio $C^s(\bar{\Omega}) = E$ $(s \in\ ]0,1])$. Supponiamo, ad esempio $A(t,x,\partial) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \partial_{xj}(a_{ij}(t,x)\ \partial_{xi})$ con $a_{ij} \in C^\beta([0,T];\ C^{1+s}(\bar{\Omega}))$, $B(t,x,\partial) = \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x,)\partial_j$ con $b,\ b_j \in C^\beta([0,T];\ C^{1+s}(\Omega))$. La stima corrispondente a (f) è:

$$|\lambda| \, \|u\|_{C^s} + \|u\|_{C^{2+s}} \leq C \left(\|f\|_{C^s} + |\lambda|^{\frac{1+s}{2}} \|g\|_{L^\infty} + \|g\|_{C^{1+s}} \right)$$

Si verifica che le ipotesi sono soddisfatte se

$$E_o = C^s(\bar{\Omega}),\ E_1 = C^{2+s}(\bar{\Omega}),\ \theta_o = -\frac{s}{2}\ ,\ F_\theta = L^\infty(\Omega).$$

Deve dunque essere $\beta > \frac{1+s}{2}$.

Le conseguenze delle ipotesi (a)-(f) sono le seguenti:

Se $f \in C^\varepsilon([0,T];\ E_o)$, $g \in C^\varepsilon([0,T];\ E_{1-\mu}) \cap C^\rho([0,T);F_\theta)$ ($\varepsilon>0$, $\rho>0$, $\rho>1-\theta_o-\mu$), $u_o \in E_1$, $A(o)u_o + f(o) \in \bar{E}_1$ (chiusura di E_1 in E_o), $\tau\,(B(o)u_o - g(o)) = 0$, il problema (3) ha un'unica soluzione stretta; se $f \in C^\varepsilon([0,T];\ E_o)$, $g \in C^\varepsilon([0,T];\ E_{1-\mu}) \cap C^\rho([0,T];\ F_\theta)$, $u_o \in E$, il problema ha un'unica soluzione classica.

Se $f \in C([0,T];\ E_o)$, $g \in C([0,T];\ E_{1-\mu})$ $u_o \in E_1$, il problema ha un'unica soluzione forte nel senso di Friedrichs.

E' chiaro perciò che, se $f = 0$, $g = 0$, $u_o \in E_1$, si ottiene una soluzione classica e da questo segue facilmente la possibilità di costruire un operatore di evoluzione.

E' poi possibile trattare il caso di più condizioni al contorno (vedi [1]) e i risultati sono applicabili anche a problemi parabolici pseudodifferenziali.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. GUIDETTI, *"Abstract linear parabolic problems with nonhomogeneous boundary conditions"*, preprint.

[2] H. TANABE, *"On the equations of evolution in a Banach space"*, Osaka Math. J. 1, 239-252 (1964).

[3] H. TANABE, *"Equation of evolution"*, Pitman (1979).

[4] P.E. SOBOLEVSKII, *"On equations of parabolic type in Banach spaces"*, Ann. Math. Soc. Transl. 49, 1-62 (1965).

[5] T. KATO, H. TANABE, *"On the abstract evolution equations"*, Osaka Math. J., 14, 107-133 (1962).

[6] T. KATO, *"Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces"*, Nagoya Math. J. 19, 93-125 (1961).

[7] P.E. SOBOLEVSKII, *"Parabolic equations in Banach space with an unbounded variable operator, a fractional power of which has a constant domain of definition"*, Sov. Math. Dokl. 2, 545-548 (1961).

[8] H. TRIEBEL, *"Interpolation theory, function spaces, differential operators"*, North Holland (1977).

[9] R. SEELEY, *"Norms and domains of the complex powers* A_B^z*"* American J. Math. 93, 299-309 (1971).

[10] A. YAGI, *"Applications of the purely imaginary powers of operator in Hilbert space"*, Journ. Funct. Anal. 73, 216-231 (1987).

[11] H. AMANN, *"Parabolic evolution equations in interpolation and extrapolation spaces"*, Journ. Funct. Anal. 78, 233-270 (1988).

[12] P. ACQUISTAPACE, B. TERRENI, *"On fundamental solutions for abstract parabolic equations"*, in "Differential equations in Banach spaces" (Ed. Favini, Obrecht). Springer Lecture Notes in Math. 1223 (1986).